

# 波浪干扰下船舶可达域计算研究

贺小檬<sup>1</sup>, 慕东东<sup>1\*</sup>, 李鸿彪<sup>2</sup>, 石林龙<sup>2</sup>, 董胜利<sup>3</sup>, 范云生<sup>1</sup>

(1. 大连海事大学 船舶与电气工程学院, 辽宁大连 116026; 2. 上海科梁信息科技股份有限公司, 上海 201103; 3. 上海船舶运输科学研究所有限公司, 上海 200135)

**摘要:** [目的]为实现波浪干扰下船舶可达域的有效计算, 提升船舶航行安全, [方法]提出一种波浪干扰下船舶可达域的计算方法。基于标准波谱理论建立了完整的数学模型, 有效刻画了不同航向角下的波浪作用力。在此基础上, 提出了一种考虑速度、波浪和转向影响的自适应步长算法, 该算法可根据系统状态自动调整计算步长, 有效平衡了计算效率与精度。通过对船舶运动方程采用显式欧拉法离散化, 并在不同初始航向下进行数值积分求解轨迹, 得到了波浪干扰下的船舶可达域边界。[结果]该研究使用 SimuNPS 仿真平台进行试验仿真, 仿真结果表明, 随着海况从二级升至四级, 可达域边界波动程度逐渐增强且形态发生明显变化, 在不同波浪入射方向下可达域呈现出相应方向的变形特征。[结论]该方法能够有效刻画波浪对船舶可达域的影响, 为船舶航行安全提供了系统的理论支持。

**关键词:** 船舶可达域; 自适应; 波浪扰动; SimuNPS

**中图分类号:** U671.99 **文献标志码:** A **【DOI】** 10.13788/j.cnki.cbge.2025.11.05

## Research on Ship Reachable Set Computation Under Wave Disturbance

HE Xiaomeng<sup>1</sup>, MU Dongdong<sup>1\*</sup>, LI Hongbiao<sup>2</sup>, SHI Linlong<sup>2</sup>,  
DONG Shengli<sup>3</sup>, FAN Yunsheng<sup>1</sup>

(1. College of Marine Electrical Engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, Liaoning, China; 2. Shanghai Kelian Information Technology Co., Ltd., Shanghai 201103, China; 3. Shanghai Ship & Shipping Research Institute Co., Ltd., Shanghai 200135, China)

**Abstract:** [Purpose] For effective computation of the ship reachable domain under wave disturbances to improve navigational safety. [Method] A computational method for determining ship reachable sets under wave disturbances is presented. A comprehensive mathematical model incorporating standard wave spectrum theory is established, effectively characterizing wave impacts across different heading angles. Based on this foundation, an adaptive step-size algorithm considering velocity, wave effects, and turning dynamics is proposed. This algorithm automatically adjusts computational step sizes according to system states, effectively balancing computational efficiency and accuracy. The boundaries of ship-reachable sets under wave disturbances are obtained by discretizing ship motion equations using explicit Euler methods and performing numerical integration of trajectories under various initial headings. [Result] Experimental

收稿日期: 2025-02-17; 修回日期: 2025-05-20

基金项目: 国家重点研发计划 (2022YFB4301401); 国家自然科学基金 (52301360, 61976033); 辽宁省基地建设试验验证计划项目 (2022JH24/10200029); 中央高校基本科研业务费 (3132024101); 中国博士后科学基金 (2022M710569); 辽宁省博士启动基金 (2022-BS-094); 大连市科技重大研究发展计划 (2023YF11GX007); 研究生教育与教学改革计划 (LNYJG2024142, YJG2024707); 中国基础研究重点项目 (JCKY2023206B026); 大连市揭榜挂帅 (2024JB11PT007)。

作者简介: 贺小檬 (1997—), 女, 硕士研究生。研究方向: 船舶可达域、轨迹跟踪。

通信作者: 慕东东 (1988—), 男, 博士、副教授。研究方向: 无人船自主控制、协同博弈。

simulations are conducted using the SimuNPS simulation platform. The simulation results demonstrate that as sea conditions escalate from Level 2 to Level 4, the reachable set boundaries exhibit progressively intensified fluctuations and undergo significant morphological changes, the reachable sets display characteristic deformations corresponding to different wave incidence directions. [Conclusion] This method effectively captures the influence of waves on ship reachable sets, providing systematic theoretical support for maritime navigation safety.

**Key words:** ship reachable domain; self-adaptive; wave disturbance; SimuNPS

## 0 引言

随着海洋经济的快速发展和海上任务的日益复杂化, 准确计算和评估船舶在复杂海况下的机动能力已成为海洋工程领域的重要研究课题<sup>[1-2]</sup>。在实际航行过程中, 船舶的航行效率、航线规划和燃油经济性对于航运企业的经营效益具有重要影响。特别是在远洋运输、海上作业等常规任务中, 船舶需要在各种海况条件下保持稳定可控的航行状态<sup>[3]</sup>。波浪高度、频率和方向的随机变化使得船舶运动变得极为复杂, 增加了航行过程中的能耗和时间成本<sup>[4-5]</sup>。因此, 如何有效计算波浪扰动下船舶的可达域, 对于提升船舶航行性能和运营效率具有重要的理论和实践意义。

可达集理论最早于20世纪60年代由控制领域的研究人员提出, 用于分析动态系统的状态。在可达域计算方法中, 水平集方法通过求解Hamilton-Jacobi偏微分方程, 能够准确捕捉可达集边界的动态演化特性<sup>[6]</sup>。椭圆法具备高效性和完备的数学理论支持, 但逼近精度与计算复杂度之间的权衡仍是难题<sup>[7]</sup>。多面体逼近法利用线性不等式灵活地描述可达集, 对线性和混合系统有效<sup>[8]</sup>。Hamilton-Jacobi方法通过解H-J-B方程精确描述非线性动力学, 但高计算复杂度限制了其在高维系统中的应用<sup>[9]</sup>。蒙特卡罗仿真法通过随机采样逼近可达域, 适合处理随机干扰和非线性系统<sup>[10]</sup>。

可达域分析方法已在航空航天和机器人等领域取得了广泛应用和显著成果。在航空航天领域, 可达域理论为航天器轨道机动的可行性分析、飞行器的安全飞行包线计算以及空中交通管理中的冲突检测提供了理论基础<sup>[11-12]</sup>。冉云霆等<sup>[13]</sup>将几何与概率方法相结合, 提出了量化航天器前向可达域不确定性的混合分析方法, 显著提高了航天器轨迹规划的可靠性。LIN等<sup>[14]</sup>研究了椭圆轨道环境下连续推力航天器的可达域特性, 为轨道任务设计提供了实用的工程参考。在机器人领域, LIU等<sup>[15]</sup>将可达集识别与控制器合成结合, 通过试验证明了安全属性能从模型成功转移到实际机器人, 解决了形式化方法在物理系统中的应用难题。CHOI等<sup>[16]</sup>将可达域分析应用于带接触的行走机器人问题, 通过Hamilton-Jacobi方法处理状态重置的不连续性, 显著扩大了欠

驱动机器人的稳定区域。YANG等<sup>[17]</sup>提出基于微分不等式的高效可达性分析方法, 成功实现了机器人在不确定条件下的在线安全验证。自动驾驶领域, XU等<sup>[18]</sup>提出了可达域分析加可满足性模型理论的控制方法, 为智能网联汽车提供安全保障。在船舶工程方面, BLAICH等<sup>[19]</sup>利用可达性图生成船舶的无碰撞轨迹, 而XIAO等<sup>[20]</sup>考虑了演变中的海洋波浪场中的船舶导航, 提出基于可达性变分不等式的时间最优路径规划方法。尽管这些研究初步将可达域概念应用于船舶导航, 但尚未系统地将波浪干扰作为影响船舶运动的内部动态因素纳入可达域计算中, 这主要是由于船舶系统独特的欠驱动特性、复杂的水动力模型以及海洋环境的强随机性等因素的制约。因此, 在波浪干扰下系统计算船舶可达域需要探索新方法, 以适应船舶与波浪相互作用的复杂特性, 推动船舶控制领域的研究与应用。

近年来, 为应对动态环境中的不确定性和外部干扰, 许多学者提出了针对欠驱动船舶的自适应控制方法。XU等<sup>[21]</sup>提出了L1自适应反步控制方法, 用于路径跟踪, 具有良好的鲁棒性和快速适应性。ZHANG等<sup>[22]</sup>提出了无奇异的连续自适应控制方法, 解决了传统控制的奇异性问题, 确保以预定义的速度和精度进行轨迹跟踪。这些方法为船舶系统提供了额外的稳健性, 体现了自适应技术在船舶控制中的独特优势。

鉴于可达域分析方法在考虑波浪干扰的船舶运动研究中尚未得到系统应用, 本文创新性地将达域分析方法引入波浪扰动下的船舶运动研究, 提出一种基于速度和转向特性的自适应步长算法, 通过标准波谱理论建立了完整的数学模型, 实现了对波浪干扰下船舶可达域的高效计算, 为海上航行安全决策和避碰规划提供了重要的理论支撑和技术保障。

## 1 数学模型及定理

### 1.1 船舶模型

研究船舶在波浪中的可达域特性, 首先需建立合适的船舶运动模型。由于船舶主要运动发生在水平面内, 且垂向运动(升沉、横摇和纵摇等)对可达域的影响相对较小, 本文主要考虑船舶在水平面内的三自由度运动, 即纵向运动、横向运动和艏摇

运动。基于坐标变换关系, 船体坐标系下的速度与地球坐标系下的位置变化率间满足如下运动学方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \psi - v \sin \psi \\ \dot{y} = u \sin \psi + v \cos \psi \\ \dot{\psi} = r \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $(x, y)$  为船舶在地球固定坐标系中的位置坐标;  $\psi$  为艏向角 (即船首方向与正北方向的夹角);  $u$ 、 $v$  分别为船体坐标系下的纵向和横向速度;  $r$  为艏摇角速度。该方程组描述了船舶运动的几何关系, 体现了两个坐标系之间的变换关系。

根据牛顿第二定律, 并考虑船舶运动的特点, 船舶在水平面内的动力学方程可表示为

$$\begin{cases} m_{11}u - m_{22}v + d_{11}u = X_{\text{control}} + X_{\text{wave}} \\ m_{22}v + m_{33}w + d_{22}v = Y_{\text{wave}} \\ m_{33}r + d_{33}r = N_{\text{control}} + N_{\text{wave}} \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $m_{11}$ 、 $m_{22}$ 、 $m_{33}$  为质量项 (包括实际质量和附加质量);  $d_{11}$ 、 $d_{22}$ 、 $d_{33}$  为线性阻尼系数,  $X_{\text{control}}$  和  $N_{\text{control}}$  分别为纵向控制力和艏摇控制力矩;  $X_{\text{wave}}$ 、 $Y_{\text{wave}}$  和  $N_{\text{wave}}$  分别为波浪引起的纵向力、横向力和艏摇力矩。

## 1.2 海浪模型

在实际海况中, 波浪具有随机性和不规则性特征。根据叠加原理, 不规则波浪可以视为具有不同频率、振幅和相位的规则波的叠加。为准确描述波浪特性, 本文采用国际拖曳水池会议 (International Towing Tank Conference, ITTC) 双参数谱:

$$\begin{cases} F_x = \rho g a b_x(\omega) \cos(kx \cos \chi + ky \sin \chi - \omega t + \epsilon) \\ F_y = \rho g a b_y(\omega) \cos(kx \cos \chi + ky \sin \chi - \omega t + \epsilon) \\ M_z = \rho g a b_z(\omega) \cos(kx \cos \chi + ky \sin \chi - \omega t + \epsilon) \end{cases} \quad (7)$$

式中:  $b_x(\omega)$ 、 $b_y(\omega)$  和  $b_z(\omega)$  为波浪力传递函数, 其值与船型参数和入射波频率有关。

## 2.2 不规则波力计算

实际海浪可以视为多个不同频率、振幅和相位

$$\begin{cases} X_{\text{wave}} = \rho g B_m L T_m \sum_{i=1}^N a_i \cos \chi \cos(k_i x \cos \chi + k_i y \sin \chi - \omega_{ei} t + \epsilon_i) \\ Y_{\text{wave}} = \rho g B_m L T_m \sum_{i=1}^N a_i \sin \chi \cos(k_i x \cos \chi + k_i y \sin \chi - \omega_{ei} t + \epsilon_i) \\ N_{\text{wave}} = \frac{1}{24} \rho g B_m L (L^2 - B_m^2) T_m \sum_{i=1}^N a_i \sin(2\chi) \cos^2(k_i x \cos \chi + k_i y \sin \chi - \omega_{ei} t + \epsilon_i) \end{cases} \quad (8)$$

## 3 船舶可达域计算

为计算波浪干扰下的船舶可达域, 本文提出了一套完整的计算流程, 见图1。整个计算过程可分为

$$S(\omega) = \frac{173 H_{1/3}^2}{T_1^4 \omega^5} \exp\left(-\frac{691}{T_1^4 \omega^4}\right) \quad (3)$$

式中:  $H_{1/3}$  为有效波高 (即最高三分之一波的平均波高);  $T_1$  为特征周期。

ITTC双参数谱具有较好的适用性, 能够较好地反映实际海况特征。该谱型可用于生成时域波浪序列, 进而计算波浪力。

基于该谱型可以得到不同频率成分的波幅:

$$a_i = \sqrt{2S(\omega_i)\Delta\omega} \quad (4)$$

式中:  $\omega_i$  为第  $i$  个频率分量;  $\Delta\omega$  为频率间隔。

## 2 波浪力计算

### 2.1 规则波力推导

规则波在固定点处的水面高程可以表示为

$$\zeta(x, y, t) = a \cos(kx \cos \chi + ky \sin \chi - \omega t + \epsilon) \quad (5)$$

式中:  $a$  为波幅;  $k$  为波数;  $\chi$  为波浪与船艏向的遭遇角;  $\omega$  为波浪频率;  $\epsilon$  为初相位。

根据流体动力学基本理论, 船体表面的动态压力可表示为

$$p = \rho g a e_{\omega} \cos(kx \cos \chi + ky \sin \chi - \omega t + \epsilon) \quad (6)$$

对该压力在船体浸水表面积分, 可得规则波引起的波浪力:

的规则波的叠加。根据本文采用的ITTC双参数谱, 对其进行离散化处理, 且考虑船速影响, 将波频率转换为遭遇频率, 最后通过线性叠加原理, 不规则波的总波浪力可表示为

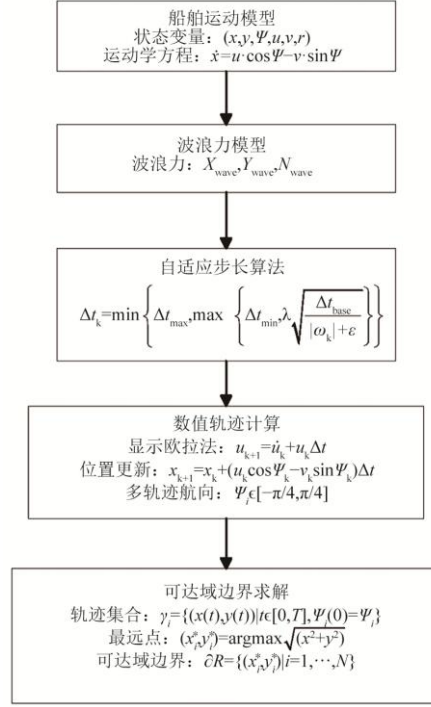


图1 波浪干扰下船舶可达域计算流程

Fig. 1 Calculation Process of Ship Reachable Domain Under Wave Interference

### 3.1 船舶轨迹计算

显式欧拉法进行离散化得到加速度计算为

基于第2节波浪力模型, 设时间步长为 $\Delta t$ , 采用

$$\begin{cases} \dot{u}_{k+1} = \dot{u}_k + \Delta t \frac{\tau_u + \rho g B_m L T_m \sum_{i=1}^N a_i \cos \chi \cos(k_i x_k \cos \chi + k_i y_k \sin \chi - \omega_i t + \epsilon_i)}{m_{11}} \\ \dot{v}_{k+1} = \dot{v}_k + \Delta t \frac{\rho g B_m L T_m \sum_{i=1}^N a_i \sin \chi \cos(k_i x_k \cos \chi + k_i y_k \sin \chi - \omega_i t + \epsilon_i)}{m_{22}} \\ \dot{r}_{k+1} = \dot{r}_k + \Delta t \frac{\tau_r + \frac{1}{24} \rho g B_m L (L^2 - B_m^2) T_m \sum_{i=1}^N a_i \sin(2\chi) \cos(k_i x_k \cos \chi + k_i y_k \sin \chi - \omega_i t + \epsilon_i)}{m_{33}} \end{cases} \quad (9)$$

速度状态更新为

$$\begin{cases} u_{k+1} = u_k + \dot{u}_k \Delta t \\ v_{k+1} = v_k + \dot{v}_k \Delta t \\ r_{k+1} = r_k + \dot{r}_k \Delta t \end{cases} \quad (10)$$

位置和艏向更新方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + (u_k \cos \Psi_k - v_k \sin \Psi_k) \Delta t \\ y_{k+1} = y_k + (u_k \sin \Psi_k + v_k \cos \Psi_k) \Delta t \\ \Psi_{k+1} = \Psi_k + r_k \Delta t \end{cases} \quad (11)$$

### 3.2 自适应步长算法

为了平衡计算精度和效率, 本文采用自适应步长算法。步长的选取需要同时考虑船速、波浪和转向的影响:

$$\Delta t_k = \min \left\{ \Delta t_{max}, \max \left\{ \Delta t_{min}, \lambda \sqrt{\frac{\Delta t_{base}}{|\omega_k| + \epsilon}} \right\} \right\} \quad (12)$$

式中:  $\omega_k$  为角速度,  $\omega_k = \sqrt{(u_k^2 + v_k^2)} / L$ 。

系数 $\lambda$ 根据航向变化率自适应调整:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & |\Psi_k - \Psi_{k-1}| < \alpha \\ \lambda_2, & \alpha \leq |\Psi_k - \Psi_{k-1}| < \beta \\ \lambda_3, & |\Psi_k - \Psi_{k-1}| \geq \beta \end{cases} \quad (13)$$

这种自适应机制确保在转向剧烈或波浪影响显著时采用较小步长, 而在直航或波浪影响较小时使用较大步长, 从而提高整体计算效率。

### 3.3 求解可达域边界

考虑到实际操纵限制和计算效率, 在初始航向范围 $[-\pi/4, \pi/4]$ 匀采样。采样间隔 $\Delta \Psi$ 的选取需要在分辨率和计算量之间取得平衡。对于每个采样航向 $\Psi_i$ ,

计算其对应的轨迹:

$$\gamma_i = \{[x(t), y(t)] | t \in [0, T], \psi(0) = \psi_i\} \quad (14)$$

对于每条轨迹 $\gamma_i$ , 确定其最远可达点:

$$(x_i^*, y_i^*) = \arg \max_{(x,y) \in \gamma_i} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15)$$

将所有轨迹的最远可达点按极角排序后连接, 即可得到可达域边界:

$$\partial R = \{(x, y) | x = x_i^*, y = y_i^*, i = 1, \dots, N\} \quad (16)$$

#### 4 仿真结果

本文选取蓝信号作为研究对象, 其主要参数见表1和表2。该艇具有较小的尺度和较高的机动性能, 适合用于验证所提出方法的有效性。仿真基于SimuNPS平台进行。海况引用具体的海况标准。

表1 蓝信号参数

Tab. 1 Parameters of Lanxin

项目	数值	项目	数值
艇长/m	7.02	满载排水/m <sup>3</sup>	2.73
艇宽/m	2.6	桨叶面积/m <sup>2</sup>	0.209 1
船舶质量/kg	2 730	最大推进角/(°)	35
最高航速/kn	35	螺距比	0.3
方形系数	0.697 6	盘面比	0.516
满载排水/m <sup>3</sup>	2.73	螺旋桨直径/m	0.46

表2 蓝信号水动力参数

Tab. 2 Hydrodynamic Parameters of Lanxin

符号	数值	符号	数值
$m_{11}$	2 652.52	$d_{11}$	848.13
$m_{22}$	2 825.57	$d_{22}$	10 162.44
$m_{33}$	4 201.68	$d_{33}$	22 721.63

##### 4.1 无干扰情况可达域

仿真采用初始速度10 m/s, 在 $-\pi/4 \sim \pi/4$ 范围内均匀采样150个初始航向。设置仿真时间为10 s, 自适应采用基准步长0.1 s, 步长范围为0.01 s~0.20 s。

##### 4.2 不同海况可达域

在无干扰的基础上, 增加不同海况下的波浪干扰, 见图2, 仿真的海况的主波向均为45°(相对于正北方向), 波浪分量数 $N=12$ 。

###### 1) 二级海况

仿真海浪的有效波高 $H=0.5$  m, 平均周期 $T=3.8$  s, 波浪频率范围为0.4 rad/s~1.2 rad/s。

二级海况下可达域边界呈现明显波动, 见图3, 最大纵向距离达108 m, 较无干扰状态增加8%。

横向范围在东西两侧分别为85 m和-60 m, 呈现不对称分布。

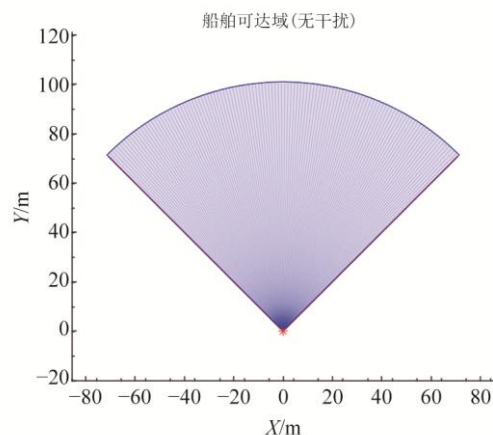


图2 无干扰情况下可达域

Fig. 2 Reachable Domain Without Disturbance

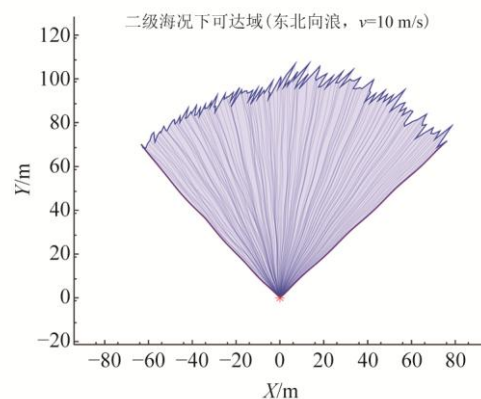


图3 二级海况下可达域

Fig. 3 Level 2 Sea State Reachable Domain

###### 2) 三级海况

仿真海浪的有效波高 $H=1.25$  m, 平均周期 $T=6$  s, 波浪频率范围为0.3 rad/s~1.0 rad/s。

三级海况下可达域边界波动更为明显, 见图4, 最大纵向距离增至120 m, 横向范围东西两侧为90 m和-57 m。表明随着波高增加, 波浪对船舶运动的不对称影响显著增强。

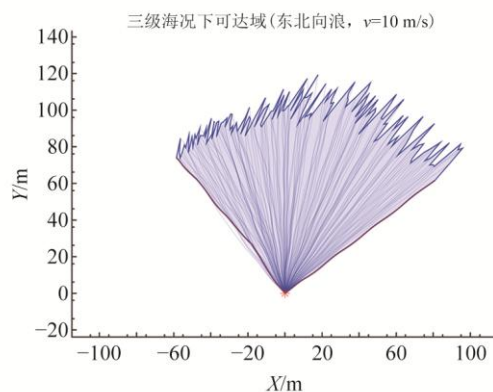


图4 三级海况下可达域

Fig. 4 Level 3 Sea State Reachable Domain

### 3) 四级海况

仿真海浪的有效波高 $H=2.5$  m, 平均周期 $T=6.5$  s, 波浪频率范围为 $0.25$  rad/s $\sim$  $0.8$  rad/s。

四级海况下可达域变形最为剧烈, 见图5, 最大纵向距离达 $131$  m, 较无干扰状态增加 $31\%$ ; 主轴偏转角达 $11.78^\circ$ , 横向分布不对称性进一步加剧, 东西两侧分别为 $101$  m和 $-48$  m, 显示高海况下船舶操纵性能受到显著影响。

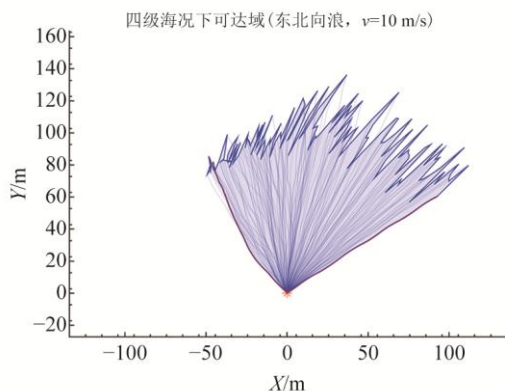


图5 四级海况下可达域

Fig. 5 Level 4 Sea State Reachable Domain

### 4) 极端海况 (六级海况)

仿真海浪的有效波高 $H=4.0$  m, 平均周期 $T=8.5$  s, 波浪频率范围为 $0.2$  rad/s $\sim$  $0.7$  rad/s。

极端海况下可达域特性发生根本性变化, 见图6, 轨迹呈现出高度混乱状态, 失去了明确的边界形态, 表明极端海况对船舶机动性能的限制显著, 在此类条件下应当优先考虑抗风浪避险而非常规导航需求。

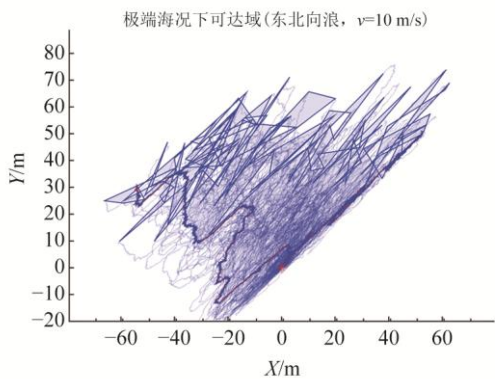


图6 六级海况下可达域

Fig. 6 Level 6 Sea State Reachable Domain

## 4.3 不同速度可达域

在二级海况的基础上, 增加不同速度下的波浪干扰。除速度外, 其余设置与上述二级海况相同。

### 1) 初始速度 $v=5$ m/s

速度为 $5$  m/s时, 可达域明显缩小, 见图7, 最大纵向距离仅为 $52$  m, 仅为速度为 $10$  m/s情况下的

$48.1\%$ ; 横向范围东西两侧分别为 $38$  m和 $-31$  m, 总体呈现相对对称的形态, 主轴偏转角为 $4.13^\circ$ , 略大于速度为 $10$  m/s时的基准情况, 表明低速状态下船舶对波浪干扰的敏感性较高。

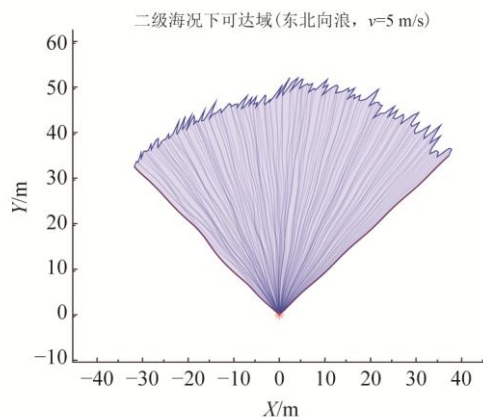


图7 速度为 $5$  m/s 下可达域

Fig. 7 Reachable Domain at 5 m/s Speed

### 2) 初始速度 $v=15$ m/s

高速条件下可达域显著扩大, 见图8, 最大纵向距离达到 $158$  m, 较速度 $10$  m/s时, 基准条件增加 $46.3\%$ ; 横向范围扩展至东西两侧的 $117$  m和 $-95$  m。主轴偏转角减小至 $2.47^\circ$ , 较基准减小 $29.0\%$ , 表明高速航行时船舶对抗波浪扰动的能力增强, 保持直航性能更好。

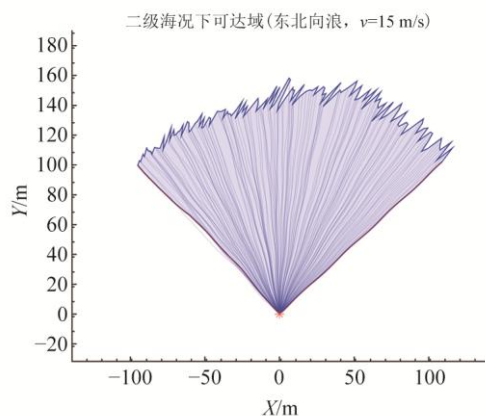


图8 速度为 $15$  m/s 下可达域

Fig. 8 Reachable Domain at 15 m/s Speed

## 4.4 不同海浪方向可达域

在上述二级海况的基础上, 增加不同方向下的波浪干扰。除方向外, 其余设置均与上述二级海况相同。

### 1) 西北向波浪

主波向 $315^\circ$  (相对于正北方向)。

西北浪条件下可达域呈现明显的不对称分布, 见图9, 最大纵向距离为 $108$  m, 横向范围东西两侧



分别为60 m和-85 m, 主轴偏转角为 $-3.49^\circ$ 。可达域整体向西南方向扩展。

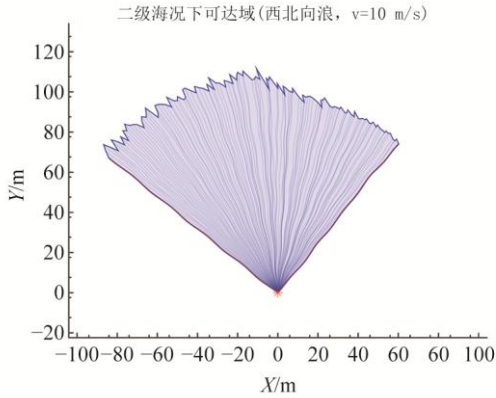


图9 西北浪可达域

Fig. 9 Northwest Wave Reachable Domain

## 2) 西南向波浪

主波向 $225^\circ$  (相对于正北方向)。

西南浪条件下可达域向东北方向收缩, 见图10, 最大纵向距离减小至93 m, 主轴偏转角为 $-4.37^\circ$ , 可达域在西侧向外扩展达-80 m, 而东侧收缩至52 m, 这表明来自船舶后方的斜向波浪会限制东向转向能力。

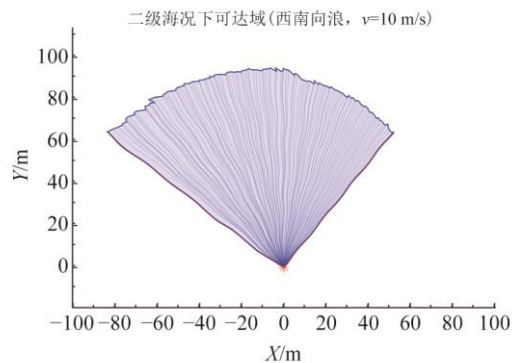


图10 西南浪可达域

Fig. 10 Southwest Wave Reachable Domain

## 3) 东南向波浪

主波向 $135^\circ$  (相对于正北方向)。

东南浪条件下可达域表现出与西北浪相反的变形特征, 见图11, 主轴偏转角为 $4.38^\circ$ , 呈现出向右偏转的特征。可达域在东侧扩展达80 m, 西侧收缩至-52 m, 与西南浪产生的效果形成对比, 验证了波浪方向对可达域形态的系统性影响。

## 4) 顶浪

主波向 $0^\circ$  (正北方向)

顶浪条件下可达域保持横向对称分布, 见图12, 主轴偏转角为 $0^\circ$ ; 东西两侧横向范围均为67 m, 最大纵向距离减小至85 m, 比基准情况减小21.3%。可达域整体呈现出纵向压缩而横向均匀的特征。

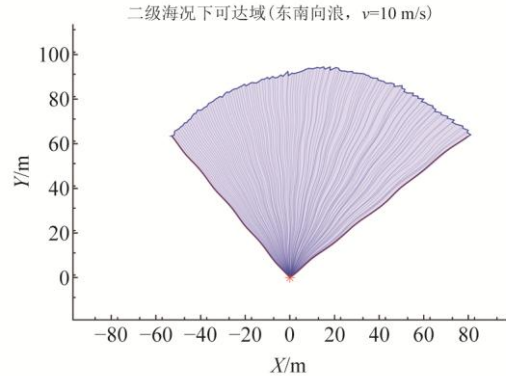


图11 东南浪可达域

Fig. 11 Northwest Wave Reachable Domain

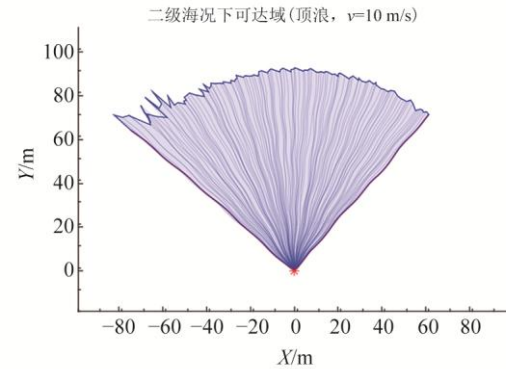


图12 顶浪可达域

Fig. 12 Head Sea Reachable Domain

综上所述, 我们对不同工况下船舶可达域的参数特征进行了总结对比, 见表3。通过对不同工况下船舶可达域的系统仿真分析, 研究发现波浪干扰、航速变化和波浪入射方向是影响可达域特征的3个关键因素。具体表现为: 随着海况等级的提升 (从二级到四级), 可达域的最大纵向距离逐步增加 (从108 m增至131 m), 主轴偏转角也随之增大 (从 $3.48^\circ$ 增至 $11.78^\circ$ ); 不同波浪方向导致可达域呈现出显著的不对称特征, 如西北浪和东南浪分别造成 $-3.49^\circ$ 和 $4.38^\circ$ 的反向偏转; 而航速的影响最为显著, 当航速从5 m/s提升至15 m/s时, 最大纵向距离从52 m增加到158 m, 横向范围也随之大幅扩展。这些结果揭示了波浪干扰对船舶可达域特性的影响, 为保障实际航行安全提供了重要理论依据。

表 3 不同工况下可达域特征参数对比

Tab. 3 Comparison of Reachable Domain Parameters Under Different Conditions

工况类型	最大纵向距离/m	最大横向距离/m (东/西)	主轴偏转角/(°)
无干扰	100	-70/70	0
二级海况	108	-60/85	3.48
三级海况	120	-57/90	6.54
四级海况	131	-48/101	11.78
顶浪	85	-67/67	0
西北浪	108	-85/60	-3.49
西南浪	93	-80/52	-4.37
东南浪	93	-52/80	4.38
低速 (5 m/s)	52	-31/38	4.13
高速 (15 m/s)	158	-95/117	2.47

5 结论

本文创新地将可达域分析方法引入船舶运动研究，提出考虑波浪扰动的船舶可达域自适应计算方法。通过标准波谱理论建立了完整的数学模型、引入时变浪扰动及基于速度、波浪和转向的自适应步长算法，精确描述船舶运动特性。该方法通过自适应步长控制，兼顾计算精度与效率，其在海上搜救、执法等领域极具实践价值，能为救援路线规划和评估执法追缉能力提供依据，对恶劣海况下船舶避碰决策与航线优化意义重大，为船舶航行安全提供有力理论支持。

尽管如此，当前研究仍存在三自由度模型简化和波浪力模型线性化等局限性。未来工作将着重探索考虑六自由度耦合运动的完整模型、非线性波浪力模型，并进一步拓展可达域分析在智能避碰决策与路径规划中的应用。

参考文献：

[1] ANTÃO P, SUN S, TEIXEIRA A P, et al. Quantitative Assessment of Ship Collision Risk Influencing Factors from Worldwide Accident and Fleet Data[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2023, 234: 109166.

[2] WANG X J, XIA G Q, ZHAO J, et al. A Novel Method for the Risk Assessment of Human Evacuation from Cruise Ships in Maritime Transportation[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2023, 230: 108887.

[3] ZHOU J Q, REN J S, BAI W W. Survey on Hydrodynamic Analysis of Ship-Ship Interaction During the Past Decade[J]. Ocean Engineering, 2023, 278: 114361.

[4] BUGRA S A. Considerations on Assistance and Rescue at Sea in the Light of the Increasing Autonomy in

Shipping[J]. Marine Policy, 2023, 153: 105639.

[5] FAN A L, YANG J, YANG L, et al. A Review of Ship Fuel Consumption Models[J]. Ocean Engineering, 2022, 264: 112405.

[6] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79(1): 12-49.

[7] KURZHANSKI A B, VARAIYA P. Ellipsoidal Techniques for Reachability Analysis[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[8] LE G C, GIRARD A. Reachability Analysis of Linear Systems Using Support Functions[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2010, 4(2): 250-262.

[9] ISAACS R. Differential Games: a Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization[M]. Massachusetts: Courier Corporation, 1999.

[10] METROPOLIS N, ULAM S. The Monte Carlo Method[J]. Journal of the American Statistical Association, 1949, 44(247): 335-341.

[11]杜向南, 杨震. 航天器单脉冲机动可达域求解算法[J]. 力学学报, 2020, 52(6): 1621-1631.

DU X N, YANG Z. An Algorithm for Solving Spacecraft Reachable Domain with Single-Impulse Maneuvering[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(6): 1621-1631.

[12] YIN T. Geometric and Probabilistic Forward Reachable Domain of Aerospace Vehicles[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 59(6): 9527-9538.

[13]冉云霆, 泮斌峰. 多约束下升力式再入飞行器可达域计算方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2025, 51(3): 904-909.



- RAN Y T, PAN B F. Calculation Method of Reachable Domain for Lifting Reentry Vehicle Under Multiple Constraints[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2025, 51(3): 904-909.
- [14] LIN X, ZHANG G. Continuous-Thrust Reachable Set for Linear Relative Motion Near Elliptical Orbits[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2023, 59(6): 9117-9127.
- [15] LIU S B, SCHÜRMANN B, ALTHOFF M. Guarantees for Real Robotic Systems: Unifying Formal Controller Synthesis and Reachset-Conformant Identification[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2023, 39(5): 3776-3790.
- [16] CHOI J J, AGRAWAL A, SREENATH K, et al. Computation of Regions of Attraction for Hybrid Limit Cycles Using Reachability: an Application to Walking Robots[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2022, 7(2): 4504-4511.
- [17] YANG X, MU B, ROBERTSON D, et al. Guaranteed Safe Path and Trajectory Tracking Via Reachability Analysis Using Differential Inequalities[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2023, 108(4): 78.
- [18] XU Q, LIU Y C, PAN J, et al. Reachability Analysis Plus Satisfiability Modulo Theories: an Adversary-Proof Control Method for Connected and Autonomous Vehicles[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2023, 70(3): 2982-2992.
- [19] BLAICH M, WIRTENSOHN S, REUTER J, et al. Trajectory Generation for Vessels Using a Reachability Graph[C]//OCEANS. 2015.
- [20] XIAO Y M H, PAN Y. Time-Optimal Path Planning in an Evolving Ocean Wave Field Based on Reachability Theory[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2023, 31(4): 1957-1964.
- [21] XU H, OLIVEIRA P, SOARES C G. L1 Adaptive Backstep Control for Path-Following of Underactuated Marine Surface Ships[J]. European Journal of Control, 2021, 58: 357-377.
- [22] ZHANG J X, CHAI T Y. Singularity-Free Continuous Adaptive Control of Uncertain Underactuated Surface Vessels with Prescribed Performance[J]. IEEE Transactions on Systems, 2022, 52(9): 5646-5655.